Для иллюстрации изложенных в лекциях основных принципов МКЭ рассчитаем ферму (рис. 1).

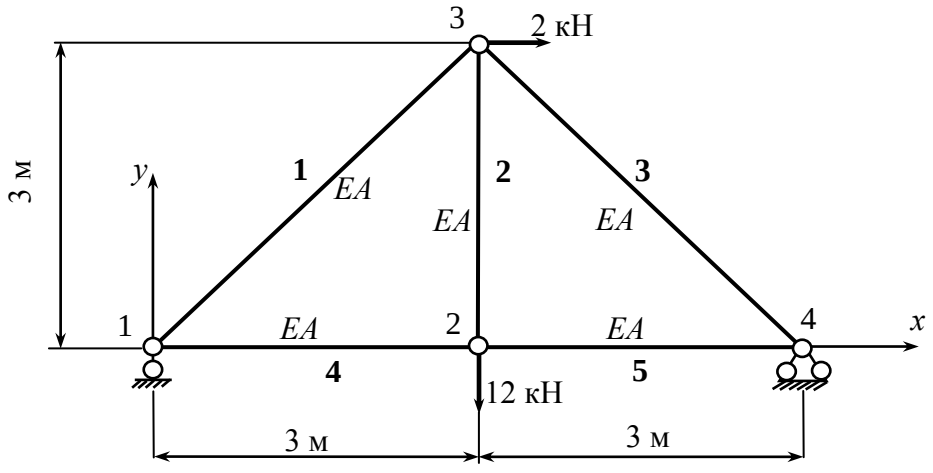

Рис. 1

Пронумеруем элементы (см. рис. 1).

Запишем матрицы жесткости отдельных элементов фермы в местных системах координат (рис. 2).

$$K_M^{1,3} = \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_M^{2,4,5} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

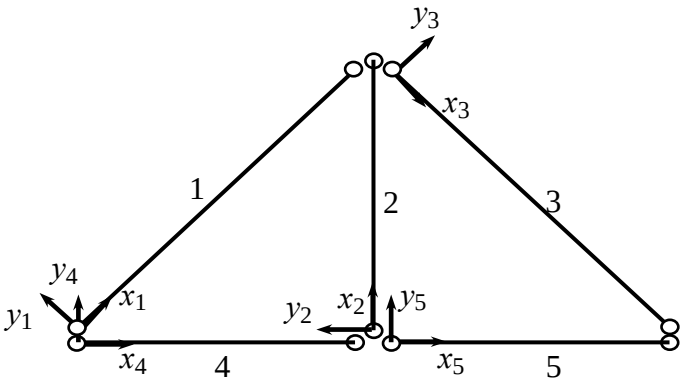

Рис. 2

Вычислим матрицы жесткости отдельных элементов фермы в глобальной системе координат *xy* (рис. 1).

Для этого составим матрицы направляющих косинусов C элементов:

$$C^1 = \begin{bmatrix} \cos\angle(x, x_1) & \cos\angle(y, x_1) & 0 & 0 \\ \cos\angle(x, y_1) & \cos\angle(y, y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\angle(x, x_1) & \cos\angle(y, x_1) \\ 0 & 0 & \cos\angle(x, y_1) & \cos\angle(y, y_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 45^\circ & \cos 315^\circ & 0 & 0 \\ \cos 135^\circ & \cos 45^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45^\circ & \cos 315^\circ \\ 0 & 0 & \cos 135^\circ & \cos 45^\circ \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^4 = C^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$K^1 = \left(C^1\right)^T K_M^1 C^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{EA}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично получим

$$K^2 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},\ K^3 = \frac{EA}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K^4 = K_M^4 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ K^5 = K_M^5 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу жесткости системы несвязанных элементов:

$$K = \begin{bmatrix} K^1 & н & у & л & и \\ & K^2 & & & \\ & & K^3 & & \\ & & & K^4 & \\ н & у & л & и & K^5 \end{bmatrix}.$$

Получим матрицу жесткости системы связанных элементов $\overline{K}$.

Сначала составим матрицу соединения *H*.

Для этого заставим систему несвязанных элементов (рис. 2) работать так же, как заданная система (рис. 1): приравняем перемещения соответствующих узлов этих двух систем.

$$q_1^1 = \overline{q}_1,$$

$$q_2^1 = \overline{q}_3,$$

$$q_1^2 = \overline{q}_2,$$

$$q_2^2 = \overline{q}_3,$$

$$q_1^3 = \overline{q}_3,$$

$$q_2^3 = \overline{q}_4,$$

$$q_1^4 = \overline{q}_1,$$

$$q_2^4 = \overline{q}_2,$$

$$q_1^5 = \overline{q}_2,$$

$$q_2^5 = \overline{q}_4.$$

В этих выражениях $\overline{q}_i$ $(=1 \div 4)$ - элементы вектора узловых перемещений $\overline{q}$ системы связанных КЭ. Нумерация узлов заданной системы – на рис. 1.

В матричном виде эти соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_1^4 \\ q_2^4 \\ q_1^5 \\ q_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix},$$

где $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, матрица соединения имеет следующий вид:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \qquad (7)$$

Теперь в соответствии с формулой (7) вычислим матрицу жесткости заданной системы $\overline{K}$. В результате перемножения матриц получим:

$$\overline{K}=\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

В заданной ферме перемещения узлов 1,4 ограничены опорами: в узле 1 невозможно вертикальное смещение, в узле 4 – и горизонтальное, и вертикальное. Поэтому в матрице $\overline{K}$ необходимо вычеркнуть строки и столбцы 2,7, 8. Тогда матрица примет вид:

$$\overline{K}=\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \end{bmatrix}$$

или

$$\overline{K}=\frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1{,}35 & -1 & 0 & -0{,}35 & -0{,}35 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0{,}35 & 0 & 0 & 0{,}7 & 0 \\ -0{,}35 & 0 & -1 & 0 & 1{,}7 \end{bmatrix}$$

Теперь можно рассчитать перемещения узлов заданной фермы.

Вектор внешних узловых нагрузок и вектор узловых перемещений заданной системы связаны соотношением

$$\overline{R} = \overline{K}\overline{q}\,,$$

откуда

$$\overline{q} = (\overline{K})^{-1}\overline{R}\,.$$

Матрица $(\overline{K})^{-1}$, обратная матрица $\overline{K}$:

$$(\overline{K})^{-1} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 0{,}98 & 0{,}49 & 0{,}49 & 0{,}49 & 0{,}49 \\ 0{,}49 & 0{,}49 & 0{,}245 & 0{,}245 & 0{,}245 \\ 0{,}49 & 0{,}245 & 1{,}435 & 0{,}245 & 0{,}945 \\ 0{,}49 & 0{,}245 & 0{,}245 & 0{,}945 & 0{,}245 \\ 0{,}49 & 0{,}245 & 0{,}945 & 0{,}245 & 0{,}945 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{0{,}49} =$$

$$= \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2{,}93 & 0{,}5 & 1{,}93 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}93 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 1{,}93 & 0{,}5 & 1{,}93 \end{bmatrix}.$$

Вектор внешних узловых нагрузок

$$\overline{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\bar{q} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 2{,}93 & 0{,}5 & 1{,}93 \\ 1 & 0{,}5 & 0{,}5 & 1{,}93 & 0{,}5 \\ 1 & 0{,}5 & 1{,}93 & 0{,}5 & 1{,}93 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ -34{,}2 \\ -2{,}14 \\ -22{,}2 \end{bmatrix}.$$

Далее определим внутренние усилия в заданной ферме.

Для этого сначала запишем векторы узловых перемещений конечных элементов (в глобальной системе координат):

$$q^1 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2{,}14 \\ -22{,}2 \end{bmatrix},$$

$$q^2 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -5 \\ -34{,}2 \\ -2{,}14 \\ -22{,}2 \end{bmatrix},$$

$$q^3 = \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -2{,}14 \\ -22{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q^4 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34{,}2 \end{bmatrix},$$

$$q^5 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -34{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Затем получим векторы узловых перемещений стержней в их местных системах координат:

$$q_M^1 = C^1 q^1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ -2{,}14 \\ -22{,}2 \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24{,}3 \\ -20{,}0 \end{bmatrix},$$

аналогично

$$q_M^2 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -34{,}2 \\ 5 \\ -22{,}2 \\ 2{,}14 \end{bmatrix},$$

$$q_M^3 = \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} 20{,}0 \\ -24{,}3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_M^4 = q^4 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34{,}2 \end{bmatrix},$$

$$q_M^5 = q^5 = \frac{3}{EA} \begin{bmatrix} -5 \\ -34{,}2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычислим векторы узловых усилий элементов:

$$R_M^1 = K_M^1 q_M^1 = \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{3}{\sqrt{2}EA} \begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24{,}3 \\ -20{,}0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 14{,}3 \\ 0 \\ -14{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7{,}15 \\ 0 \\ -7{,}15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{кН},$$

аналогично

$$R_M^2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{кН},$$

$$R_M^3 = \begin{bmatrix} 10{,}0 \\ 0 \\ -10{,}0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{кН},$$

$$R_M^4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{кН},$$

$$R_M^5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{кН}.$$

Результаты расчета этих усилий для некоторых элементов показаны на рис. 3.

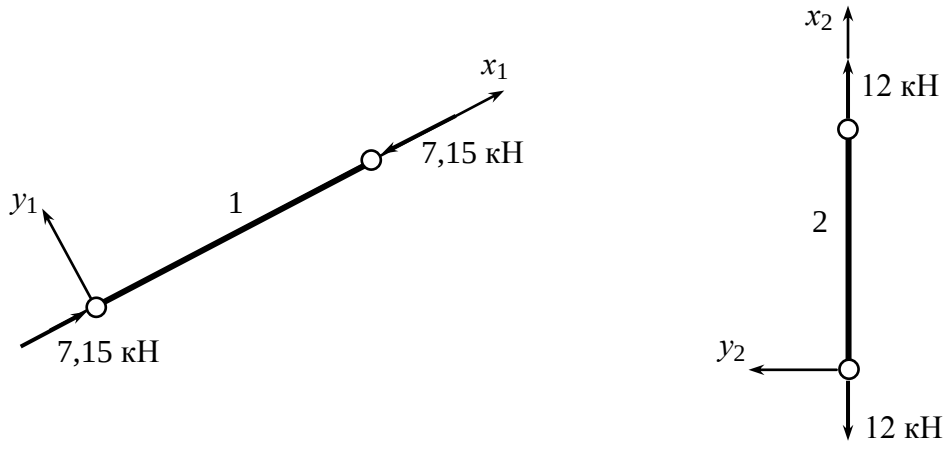

Рис. 3

Проверить результаты расчета можно, например, рассмотрев равновесие узлов фермы. Вырежем узел 3 и рассмотрим его равновесие под действием приложенных внешних нагрузок и внутренних усилий (рис. 4):

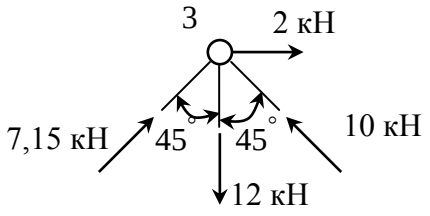

Рис. 4

Составим уравнение равновесия

$$\sum x = 0:\ 7{,}15\cos 45^\circ + 2 - 10\cos 45^\circ \approx 0.$$

$$\sum y = 0:\ 7{,}15\cos 45^\circ - 2 + 10\cos 45^\circ \approx 0.$$

Таким образом, узлы находятся в равновесии.